

المسائل الأولى (24 درجة) (أ) احسب التكامل الآتي : $I_1 = \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2}$

(ب) احسب التكامل الآتي : $|x| \leq a$ $I_2 = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

واستخدم النتيجة لحساب التكامل : $I_3 = \int \sqrt{3 - 4x^2} dx$

المسائل الثاني (36 درجة) احسب التكاملات الآتية :

$\int \frac{(\sqrt{x} - 2\sqrt{x})^2}{x} dx, x > 0$, $\int \frac{e^{2x} + 3e^x}{\sqrt{e^{2x} + e^x} + 1} dx$, $\int \frac{dx}{1 + e^{x^2}}$

المسائل الثالث (26 درجة) : حدد طبيعة التكاملات المسئلة الآتية :

$\int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx$, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 1}}$

المسائل الرابع : (4 درجة) : أكتب مساحة المنحنى المعطى بمعادلات الآتية :

$x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$

استاذ المقرر :

د. منير مخلوف

ابتعثت للأستاذة

د. منير مخلوف

محضر في 2013/6/13

أشياء للبرهان

مادة لغت
 طلبة العلم - قسم الرياضيات
 الفصل الثاني لعام ٢٠١٩ - ٢٠١٩
 السنة الأولى رياضيات

حوارة السؤال الأول: (أ) لمياء

$$I_1 = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{x^{2+1}-1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \quad [24]$$

أربع خطوات

$$= \operatorname{arctan} x - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

ونقلنا من المعلوم أن:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{n} \frac{1}{2a^{n-1}(n-1)} \left[(-2n-3) \frac{1}{n-1} + \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} \right]$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

وعليه فإن التكامل:

نكتفي به ونستعمل القانون السابق حيث أن: $a=1$ و $n=2$ و بالتعويض نحصل على:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2(1)^2(2-1)} \left[(-2-3) \frac{1}{2-1} + \frac{x}{x^2+1} \right] = \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctan} x + \frac{x}{x^2+1} \right]$$

فإن:

$$I_1 = \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2} \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2} \frac{x}{(x^2+1)} + C$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2} \frac{x}{(x^2+1)} + C$$

وبعد إذن النتيجة النهائية مكتوبة معرفة على الفترة $(-\infty, \infty)$ و بالتعويض في

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$$

بذلك نكون

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$$

$$\sin t = \frac{x}{a} \Rightarrow t = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} \Rightarrow \cos t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

$$\frac{1}{a} \sin t = \frac{x}{a^2} \Rightarrow \sin t = \frac{x}{a} \Rightarrow t = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$$

وعليه فإن:

(٢)

شكل متساوي الساقين :

$$I_2 = \int \sqrt{3-4x}^2 dx$$

نضع أن :

$$I_2 = \int \sqrt{1-\frac{4}{3}x}^2 dx = \sqrt{3} \int \sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)^2} dx$$

$$2 \quad dt = \frac{2}{\sqrt{3}} dx \rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dt \quad \text{فإن أن } \frac{2}{\sqrt{3}} x = t$$

وبالتعويض في المتكامل المقروص

$$I_2 = \frac{3}{2} \int \sqrt{1-t^2} dt = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} \arcsin t + \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2} \right] + C \rightarrow$$

3

$$I_2 = \frac{3}{4} \arcsin \frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{x\sqrt{3-4x}}{2} + C$$

جواب السؤال الثاني : حساب التكامل ، $x > 0$ ، $\int \frac{(\sqrt{x} - 2\sqrt{x})^2}{x} dx$ 36 سكرتيرتون فقط

نلاحظ أن التكامل المقروص يكتب بالصيغة :

$$\int x^{-1} (x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}})^2 dx = \int x^{-\frac{1}{2}} (-2 + x^{\frac{1}{2}})^2 dx$$

3

$$n = \frac{1}{6} \quad m = -\frac{1}{3} \quad p = 2$$

$$x = t^6 \quad \text{أو} \quad t = \sqrt[6]{x}$$

لنأخذ أن :

$$dx = 6t^5 dt \quad \text{وبالتعويض في التكامل}$$

$$\begin{aligned} 4 \int x^{-\frac{1}{2}} (-2 + x^{\frac{1}{2}})^2 dx &= \int t^{-\frac{1}{2}} (-2 + t)^2 6t^5 dt = 6 \int t^{-\frac{1}{2}} (t^2 - 4t + 4) t^5 dt = \\ &= 6 \int t^{\frac{9}{2}} dt - 24 \int t^{\frac{7}{2}} dt + 24 \int t^{\frac{5}{2}} dt \\ 5 \quad &= \frac{6}{\frac{9}{2}+1} t^{\frac{9}{2}+1} - \frac{24}{\frac{7}{2}+1} t^{\frac{7}{2}+1} + \frac{24}{\frac{5}{2}+1} t^{\frac{5}{2}+1} + C = x - \frac{24}{5} x^{\frac{2}{3}} + 6x^{\frac{1}{3}} + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{e^{2x} + 3e^x}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} dx \quad \text{الحل وحساب التكامل ١-}$$

$$(t > 0) \quad dx = \frac{dt}{t} \quad \text{أو} \quad dt = e^x dx \quad \text{نضع أن } t = e^x \quad \text{وبالتعويض في التكامل}$$

$$4 \int \frac{e^{2x} + 3e^x}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} dx = \int \frac{t^2 + 3t}{\sqrt{t^2 + t + 1}} \frac{dt}{t} = \int \frac{t+3}{\sqrt{t^2 + t + 1}} + \frac{3}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + t + 1}}$$

(3)

نلاحظ اننا على القول بمرحلة من المسار هو مستقيمة ما عتد الذر بعد ان يتقارب 3

ونقسم على (2) رتبة مارتا

$$\frac{1}{2} \int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+t+1}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+t+1)}{\sqrt{t^2+t+1}} = \sqrt{t^2+t+1} = \sqrt{e^{2t} - e^2 + 1}$$

أيضا بالنسبة للمعادلة الثاني لدينا

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}} = \ln \left| (t+\frac{1}{2}) + \sqrt{t^2+t+1} \right| + C$$

$$= \ln \left| (e^x + \frac{1}{2}) + \sqrt{e^{2x} + e^2 + 1} \right|$$

فلذا

$$\int \frac{e^{2x} + 3e^x}{\sqrt{e^{2x} + e^2 + 1}} dx = \sqrt{e^{2x} + e^2 + 1} + \frac{5}{2} \ln \left| (e^x + \frac{1}{2}) \sqrt{e^{2x} + e^2 + 1} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{1+ch^2 x}$$

أيضا بالنسبة للمعادلة

$$\text{th } x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1-t^2}$$

نفرض أن :

ومن جهة ثانية لدينا :

$$\frac{1}{ch^2 x} = 1 - \text{th}^2 x = 1 - t^2 \Rightarrow ch^2 x = \frac{1}{1-t^2}$$

وبالمعكوسية من المتطابق المعروض عند

$$\int \frac{dx}{1+ch^2 x} = \int \frac{dt}{2-t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\text{th } x + \sqrt{2}}{\text{th } x - \sqrt{2}} \right| + C$$

(4)

المعادلة التفاضلية

لنفرض أن $y(x) = e^{-x}$ و $y'(x) = -e^{-x}$
 يمكن استخدام طريقة المتكامل بالفرق بين الطرفين
 $y'(x) dx = -e^{-x} dx$
 $y(x) = e^{-x}$
 $y'(x) dx = -e^{-x} dx$

بالمقارنة مع $y(x) = e^{-x}$
 $y'(x) dx = -e^{-x} dx$

4 $\int_0^u e^{-x} \cos x dx = -[e^{-x} \sin x]_0^u + \int_0^u e^{-x} \sin x dx$

أيضاً المثلثية: $f(x) = e^{-x}$ و $g(x) = \cos x$

بالمقارنة مع $y(x) = e^{-x}$
 $y'(x) dx = -e^{-x} dx$

4 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} \cos x) = 0$

(المركبة وحيدة ومحددة)

وعليه فإن $y(x) = e^{-x}$ هي الحل العام للمعادلة التفاضلية

2 $\int_0^u e^{-x} \cos x dx = -[e^{-x} \sin x]_0^u + \int_0^u e^{-x} \sin x dx$

بالمقارنة مع $y(x) = e^{-x}$
 $y'(x) dx = -e^{-x} dx$

$\int_0^u e^{-x} \sin x dx = -[e^{-x} \cos x]_0^u + \int_0^u e^{-x} \cos x dx$

$\Rightarrow \int_0^u e^{-x} \cos x dx = [e^{-x} (\sin x + \cos x)]_0^u$

بالمقارنة مع $y(x) = e^{-x}$
 $y'(x) dx = -e^{-x} dx$

3 $\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u e^{-x} \cos x dx = \lim_{u \rightarrow \infty} [e^{-u} (\sin u + \cos u)] + 1$

بالمقارنة مع $y(x) = e^{-x}$
 $y'(x) dx = -e^{-x} dx$

3 $\int_0^u e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2}$

بالمقارنة مع $y(x) = e^{-x}$
 $y'(x) dx = -e^{-x} dx$

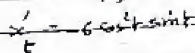
$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{x+4x^3}}$

4 $x=0$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}}$

4 $\frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ و $\forall x \in]0, +\infty[$

3 $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+4x^3}} \leq 2$

14. أولئك هم الفاسقون (الف)



~~$$y' = 6 \sin^2 t \cos t$$~~

وَبِالْمَعْرُوفِ يُحْيِيكَ الْعَادِلُ.

$$S = \frac{1}{2} \int_t^1 (x y'_t - x'_t y_t) dt$$

حیات

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [12 \sin^2 t \cos^4 t + 12 \cos^2 t \sin^4 t] dt = \dots \\
 &= 6 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = 6 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin 2t \right)^2 dt \\
 &= 6 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} \frac{1 - \cos 4t}{2} \right] dt = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4t \right) dt \\
 &= \frac{3}{4} \left[t \right]_0^{2\pi} - \frac{3}{4} \frac{1}{4} [\sin 4t]_0^{2\pi} = \dots \\
 &= \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}
 \end{aligned}$$

اسماء الطموس: